07/03/2017

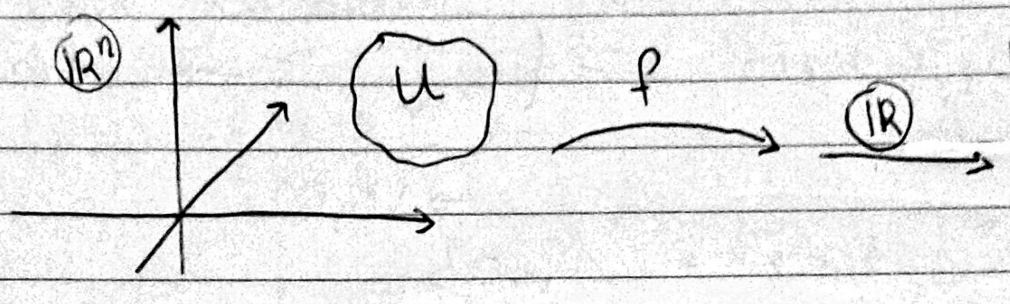
Μάθημα 2ο

Απει4

Περιεχόμενα Απειροστικού Λογισμού IV

(A) Ολοκλήρωση συναρτήσεων με περισσότερες μεταβλητές

(1)



$$\int_U f(\bar{x})d\bar{x} = \int_U f \in \mathbb{R}$$

Πολλαπλό ολοκλήρωμα της (πραγματικής συνάρτησης) f

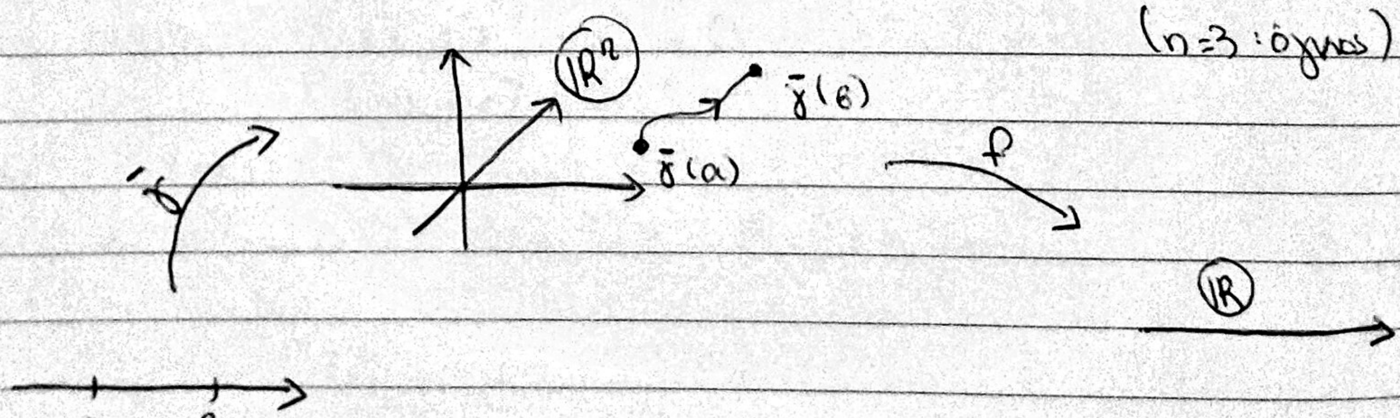
αν $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$

(διπλό ($n=2$), τριπλό ($n=3$) κλπ)

Ερώτημα: Για ποια $U \subset \mathbb{R}^n$ και ποιες $f: U \to \mathbb{R}$ ορίζεται αυτό;

Ειδική περίπτωση: $f \equiv 1$: $\int_U 1 = v(U)$ περιεχόμενο (ή όγκος) του U ($n=3$: όγκος)

(2)



$$\underbrace{\int_{\bar{\gamma}} f\,ds \in \mathbb{R}}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς μήκος καμπύλης}} \left[\overset{*}{:=} \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}_{\text{νόρμα}} dt, \ \text{αν } \bar{\gamma}: C^1 \text{ και } f: C \right]$$

$$[a,b] \ni t \mapsto \bar\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_n(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \bar\gamma'(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots \\ \gamma_n'(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

παρένθεση

$$(f+g)(\bar\gamma(t)) = f(\bar\gamma(t) + g(\bar\gamma(t)))$$

Από τον ορισμό αυτόν (*) προκύπτουν οι ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

π.χ. $\int_{\bar\gamma} (f+g)\,ds = \int_{\bar\gamma} f\,ds + \int_{\bar\gamma} g\,d$

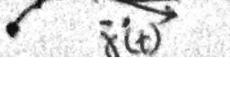
Ειδική περίπτωση: $f \equiv 1$: $\int_{\bar\gamma} 1\,d\sigma \overset{\text{ορ}}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

μήκος της καμπύλης $\bar\gamma$ $= L(\bar\gamma)$

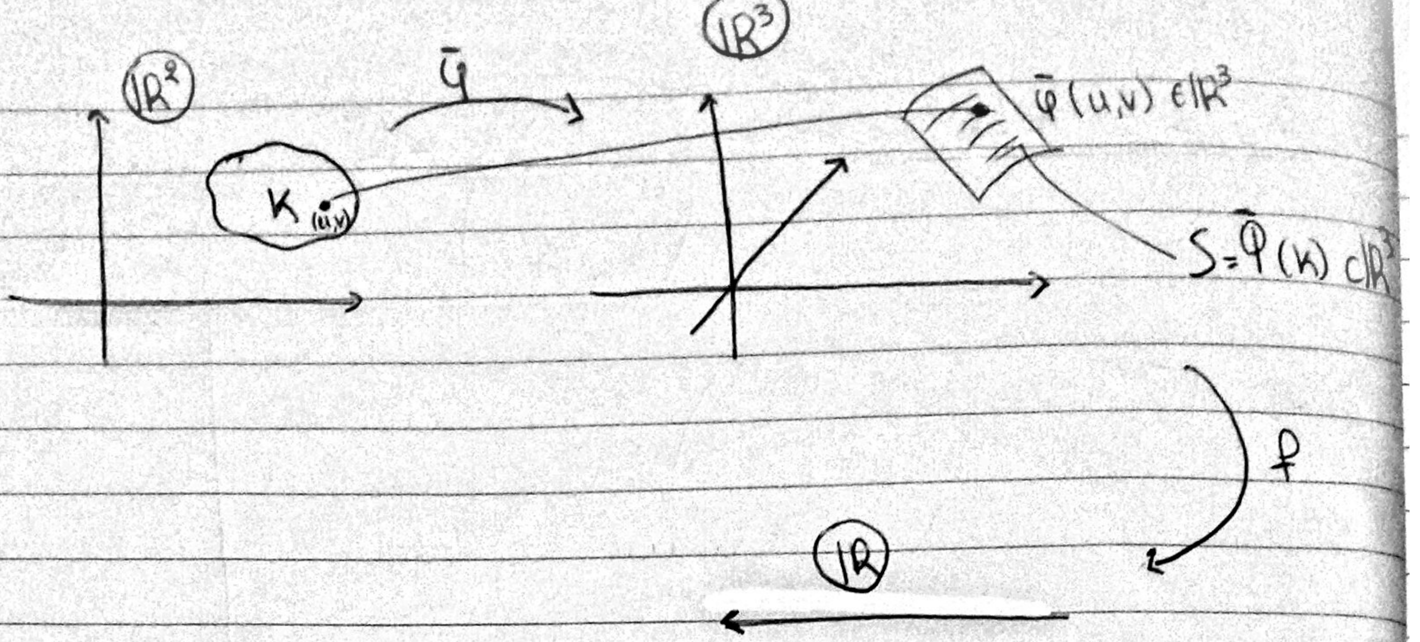
③ ίδια $\bar\gamma$, αλλά $\bar f(\bar\gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$

$\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar x \in \mathbb{R}$ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου της $\bar f$

$$:= \int_a^b \bar f(\gamma(t)) \cdot \bar\gamma'(t)\,dt$$, αν $\bar\gamma$ C^1 και $\bar f$: C



(4)



$$\int_{\bar\Phi} f\, d\sigma := \int_K f(\bar\Phi(u,v)) \left\| \underbrace{\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \bar\Phi}{\partial v}}_{} \right\| d(u,v)$$

διάνυσμα του χώρου
(εξωτερικό γινόμενο ⇐ απαιτείται ο όρος)

<u>επιφανειακό ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης f</u>.

<u>Ειδική περίπτωση: $f \equiv 1$</u> :

$$\int_{\bar\Phi} 1\, d\sigma \overset{\text{ορ.}}{=} \int_K \left\|\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}\right\| d(u,v) = A(\bar\Phi)$$

εμβαδό της επιφάνειας $\bar\Phi$.

(5) <u>ίδια $\bar\varphi$</u>, αλλά $\bar f(\bar\varphi(u,v)) \in \mathbb{R}^3$

$$\int_{\bar\varphi} \bar f\cdot\bar n\, d\sigma := \int_K \bar f(\bar\varphi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\bar\varphi}{\partial v}\right) d(u,v) \in \mathbb{R}$$

<u>επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\bar f$</u>

(B) ομοιόμορφη σύγκλιση.

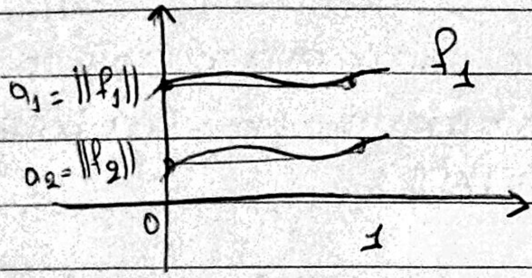
$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

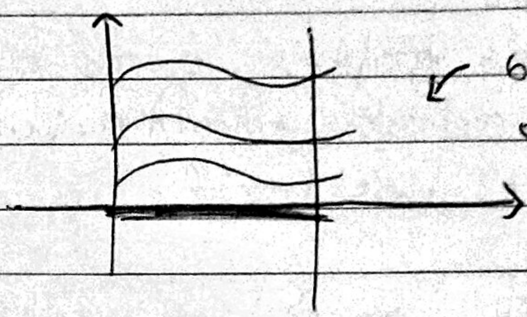
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα.

$$:\Longleftrightarrow \quad \| f_n - f \| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad , \text{όπου } \|f\| := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

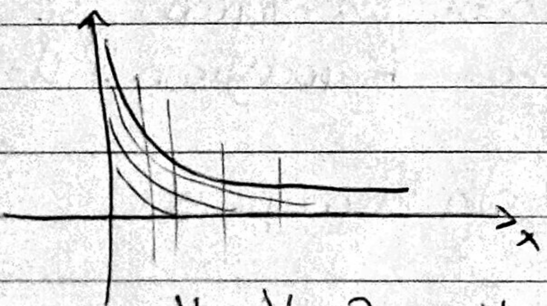
↳ νόρμα συνάρτησης





↙ συγκλίνει ομοιόμορφα

$\forall \varepsilon \ \exists n_0 \ \forall x$



$\forall \varepsilon \ \forall x \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0$

(Γ) Σειρές Fourier

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π - περιοδική

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \quad , a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

(A) Ολοκλήρωση συναρτήσεων με περισσότερες μεταβλητές

(1) Πολλαπλό ολοκλήρωμα

Πως μπορούμε να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_U f \in \mathbb{R}$ όπου $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$;
(Ειδικότερα: Για ποια U, για ποια f;)

- Αυτό που θα ορίσουμε θα είναι το ολοκλήρωμα (Darboux) Riemann
- Σε γενικές γραμμές αυτός ο ορισμός είναι αντίστοιχος του ορισμού ορισμένου ολοκληρώματος Riemann μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής (→ ΑΠΕΙ ΙΙ)

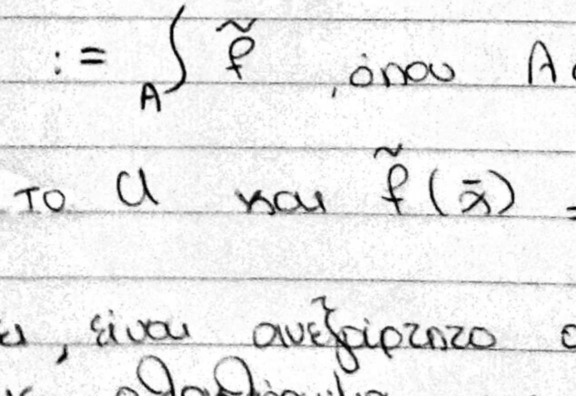
- Κατ' αρχάς, οπωσδήποτε για να ορίσουμε ολοκλήρωμα τέτοιο θέλουμε: $U \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και f φραγμένη, $f: U \to \mathbb{R}$

$f: U \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\iff$ $f(U) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο.

- Για να ορίσουμε το $\int_U f$ θα δείξουμε ότι το

$\int_U f := \int_A \tilde{f}$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο που περιέχει το U και $\tilde{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in U \\ 0, & \bar{x} \in A \setminus U \end{cases}$

αν υπάρχει, είναι ανεξάρτητο από το A, και το ονομάζουμε ολοκλήρωμα της $f: U \to \mathbb{R}$



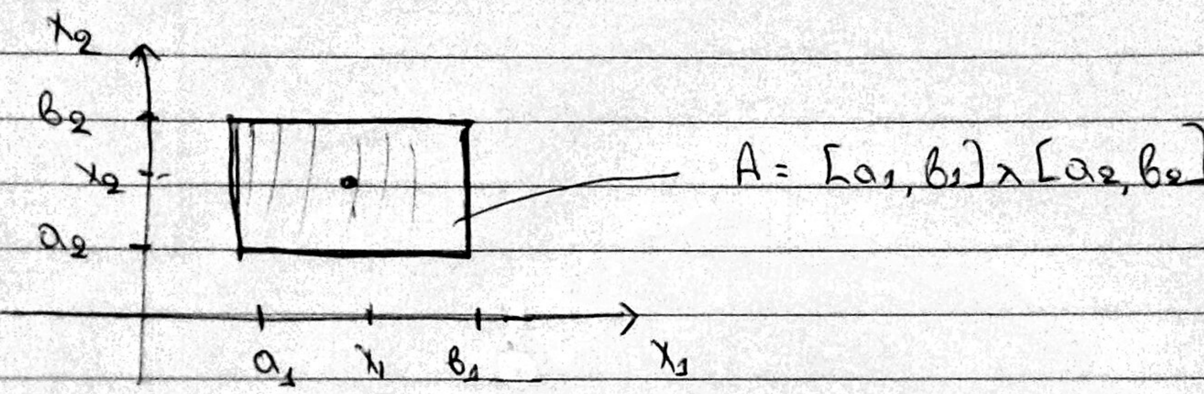
$$\int_U f := \int_A \tilde{f} = \int_B \hat{f},$$

όπου B κλειστό ορθογώνιο με $B \supset U$ και

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & , \bar{x} \in B \\ 0 & , \bar{x} \in B \setminus U \end{cases}$$

Ορισμός: Ονομάζουμε κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ ένα σύνολο της μορφής $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a_i < b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$

$= \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i = 1, \dots, n : a_i \leq x_i \leq b_i \}$



και (όγκο - ή) περιεχόμενο του A τον πραγματικό αριθμό

$$V(A) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > 0 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$